



Grain 2.2 : analogies électro- mécaniques

PHILIPPE HERZOG ET GUILLAUME PENELET

Table des matières



I - Introduction	5
A. Objectif.....	5
B. Test de connaissances.....	5
C. Contexte.....	7
II - Phénomènes élémentaires	9
A. Eléments mécaniques.....	9
1. <i>Eléments mécaniques</i>	9
2. <i>Inertie d'un objet</i>	9
3. <i>Déformation d'un objet</i>	10
4. <i>Amortissement</i>	10
5. <i>Levier mécanique</i>	10
III - Analogies mécano-électriques	13
A. Analogies mécano-électriques.....	13
B. Analogie directe.....	13
1. <i>Analogie directe</i>	13
2. <i>Analogie directe des éléments mécaniques</i>	14
C. Analogie inverse.....	14
1. <i>Analogie inverse</i>	14
2. <i>Analogie inverse des éléments mécaniques</i>	15
D. Système mécanique simple.....	16
1. <i>Système mécanique simple</i>	16
2. <i>Système "masse-ressort" soumis à une force externe (1/2)</i>	16
3. <i>Système "masse-ressort" soumis à une force externe (2/2)</i>	16
E. Comparaison des analogies.....	17
1. <i>Système masse-ressort en analogie directe</i>	17
2. <i>Système masse-ressort en analogie inverse</i>	17
3. <i>Impédance mécanique</i>	17
4. <i>Mobilité (admittance mécanique)</i>	18
5. <i>Choix d'une analogie</i>	19

IV - Schéma équivalent d'un système	21
A. Applications, exemple d'un système à 2 DDL.....	21
B. Cas d'un système réel : le haut-parleur.....	21
C. Système mécanique.....	22
D. Approche directe : description mécanique.....	23
E. Approche directe : regroupement des termes.....	23
F. Approche directe: analogie électro-mécanique (1/2).....	23
G. Approche directe: analogie électro-mécanique (2/2).....	24
H. Méthode des mobilités: principe.....	24
I. Méthode des mobilités: schéma mécanique.....	25
J. Méthode des mobilités: conversion en analogie inverse.....	25
K. Méthode des mobilités : conversion en schéma dual.....	26
V - Conclusion	27
A. Test de sortie.....	27
B. Test de sortie: réponse.....	28
C. Bibliographie.....	28

Introduction

Objectif	5
Test de connaissances	5
Contexte	7

A. Objectif

Objectif

L'objectif de ce grain est d'identifier les principales notions mises en jeu dans les systèmes mécaniques oscillants, d'en réaliser des schémas électromécaniques, puis de les convertir en un schéma électrique équivalent par analogie des phénomènes.

Prérequis

- Notions de base de mécanique du point
<http://numeliphy.unisciel.fr/consultation/liste/module/mecanique1>¹
- Notions de base d'électricité
(*grain 2.1*²)

B. Test de connaissances

Exercice 1 : Test d'entrée

Question 1

Qu'est ce qu'un degré de liberté (en mécanique)?

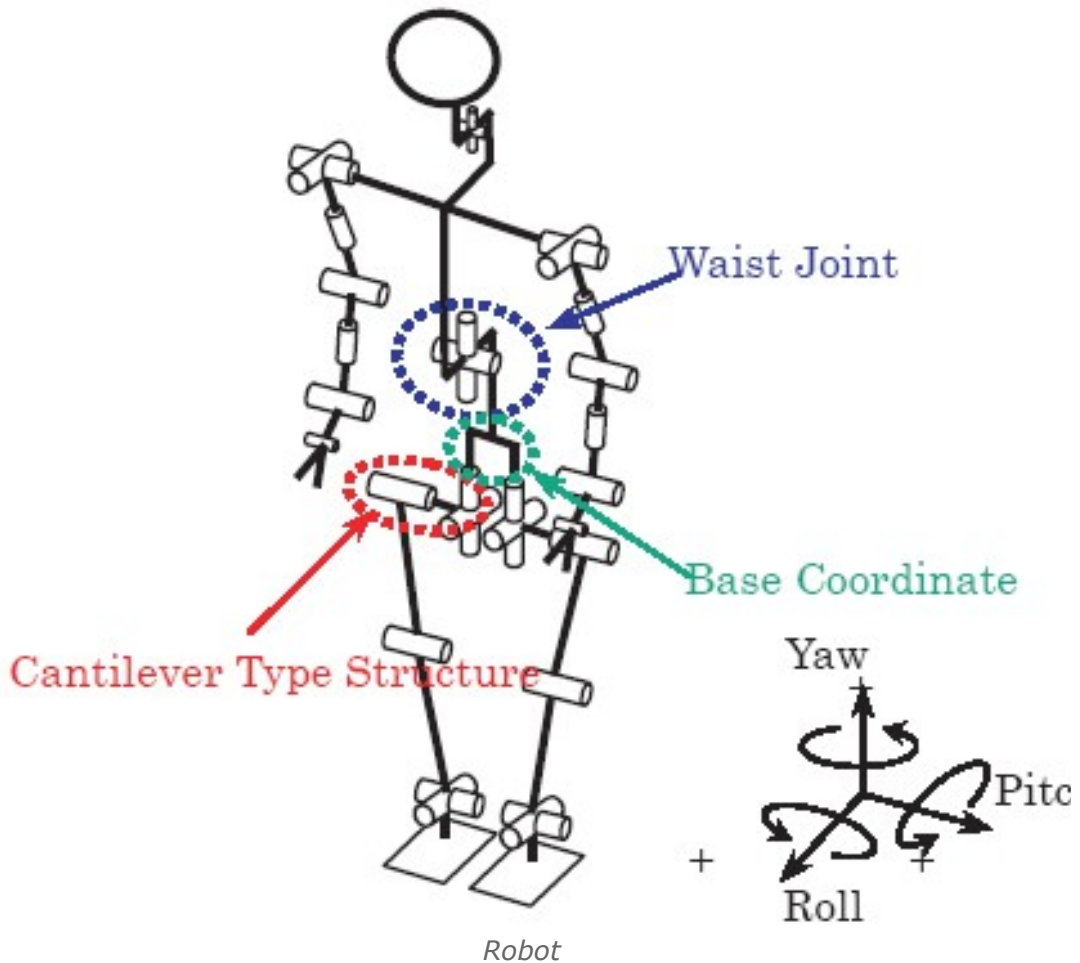
- C'est une possibilité de mouvement non contrainte (en translation ou en rotation) pour le système mécanique considéré.
- C'est la latitude dont dispose le mécanicien à choisir librement son référentiel de travail.
- Cela n'existe pas

1 - <http://numeliphy.unisciel.fr/consultation/liste/module/mecanique1>

2 - [../Grain2.1/index.html](http://numeliphy.unisciel.fr/consultation/liste/module/mecanique1)

Question 2

De combien de degré de libertés dispose le système mécanique suivant?



- 30
- 6
- une infinité

Question 3

Qu'est ce qu'un oscillateur (en mécanique)?

- c'est un système compressible, de masse non nulle et finie.
- c'est un système présentant au moins une résonance.
- c'est un système susceptible d'évoluer autour d'une position d'équilibre stable

Question 4

Que désigne la "résonance" d'un oscillateur mécanique à 1 degré de liberté?

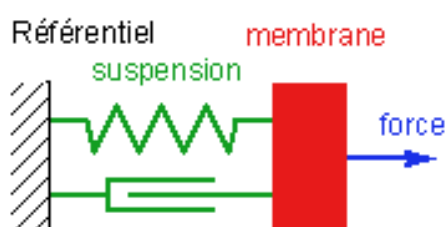
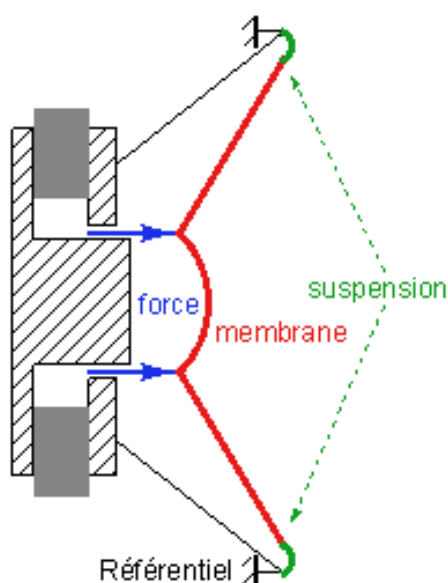
- c'est l'aptitude de ce système à accumuler de l'énergie à une fréquence particulière (dite de résonance)
- c'est l'aptitude de ce système à produire de l'énergie à une fréquence particulière (dite de résonance)
- c'est l'aptitude de ce système à dissiper de l'énergie à une fréquence particulière (dite de résonance)

C. Contexte

Objets représentables par analogie

Beaucoup de systèmes mécaniques réels peuvent être correctement approximatés par un nombre fini d'éléments mécaniques discrets.

En différenciant les principaux phénomènes mécaniques, il est ainsi possible de les représenter sous forme de masses indéformables, raideurs sans masse, etc.



Les exemples qui illustrent ce cours se limitent à des déplacements en translation, mais la même approche convient pour des translations et rotations multiples.

Phénomènes élémentaires

A. Éléments mécaniques

1. Éléments mécaniques

Nous allons maintenant représenter sous forme d'éléments de base les principaux phénomènes mis en jeu dans les systèmes mécaniques :

- l'inertie d'une masse,
- la déformation d'un objet élastique,
- la dissipation par frottement,
- la transformation par un levier.

2. Inertie d'un objet

Masse "ponctuelle" rigide

La résultante F des forces extérieures appliquées à un corps rigide conduit à en accélérer le mouvement.

L'inertie liée à sa masse M est proportionnelle à cette accélération, exprimée dans un repère galiléen.

Relation Fondamentale de la Dynamique



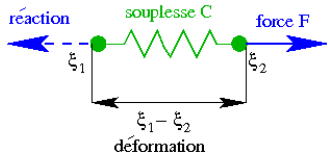
- Dans ce cours, le repère (référentiel mécanique) est fixe : $v_{ref} = 0$.
- L'inertie de la masse correspond à l'énergie cinétique du système.

3. Déformation d'un objet

Souplesse axiale linéaire sans masse

La résultante F des forces extérieures appliquées à un objet élastique (ici considéré sans masse) conduit à déformer cet objet.

Loi de comportement

	$F(t) = \frac{1}{C}(\xi_2(t) - \xi_1(t))$ $= \frac{1}{C} \int (v_2(t) - v_1(t)) dt$ $F = \frac{1}{j\omega C} (v_2 - v_1)$
---	---

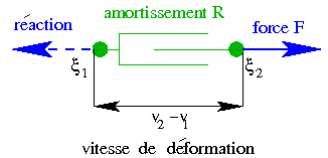
- En élasticité linéaire, la déformation $(\xi_2 - \xi_1)$ est proportionnelle à la force.
- Dans ce cours, l'élasticité est exprimée par la souplesse ("compliance") C plutôt que la raideur $K = 1/C$
- La déformation élastique correspond à un "stockage" d'énergie potentielle

4. Amortissement

Amortisseur ("dashpot") linéaire

La résultante F des forces extérieures appliquées à un objet sans raideur et de masse négligeable peut le déformer. La réaction de l'objet à cette déformation est alors dissipative.

Loi de comportement

	$F(t) = R(v_2(t) - v_1(t))$ $F = R(v_2 - v_1)$
---	--

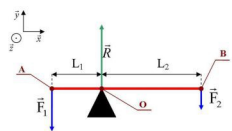
- La vitesse de déformation $(v_2 - v_1)$ est ici proportionnelle à F
- Elle exprime une transformation irréversible liée à la viscosité linéaire.

5. Levier mécanique

Mécanisme idéal (sans pertes)

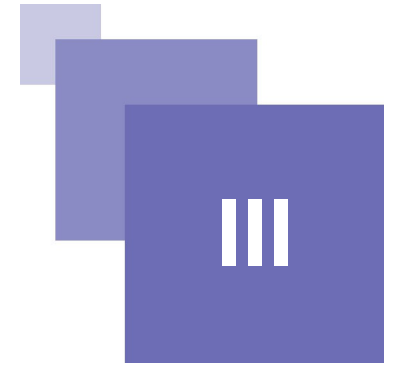
Un levier est un exemple de mécanisme idéal qui couple deux paires de grandeurs mécaniques (F_1, v_1) et (F_2, v_2) .

Equations de couplage

	$F_1 \ell_1 = F_2 \ell_2$ $\frac{v_1}{\ell_1} = \frac{v_2}{\ell_2}$
---	---

- Le levier joue le rôle d'un transformateur : $\frac{F_1}{v_1} = \left(\frac{\ell_2}{\ell_1}\right)^2 \frac{F_2}{v_2}$.
- Cette transformation idéale conserve l'énergie.

Analogies mécano-électriques



Analogies mécano-électriques	13
Analogie directe	13
Analogie inverse	14
Système mécanique simple	16
Comparaison des analogies	17

A. Analogies mécano-électriques

Nous allons maintenant représenter les phénomènes mis en jeu dans les systèmes mécaniques sous forme d'un schéma électrique équivalent. Ceci fait appel à l'analogie des phénomènes dans les deux formes d'énergie, qui peut s'exprimer de deux manières :

- analogie directe (ou analogie impédance),
- analogie inverse (ou analogie admittance).

B. Analogie directe

1. Analogie directe

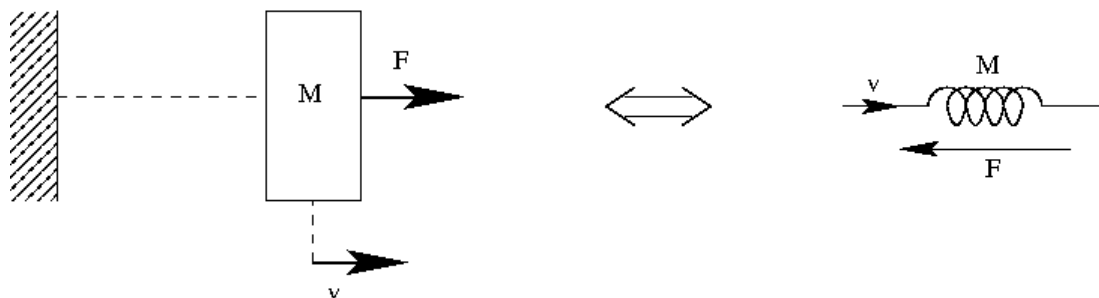
Conventionnellement, l'analogie "directe" consiste à faire correspondre à la vitesse d'une masse mécanique le courant électrique (qui peut être considéré comme la vitesse d'écoulement des charges électriques dans un conducteur).

D'un point de vue énergétique, cela conduit à associer l'énergie cinétique d'un système mécanique à une forme d'énergie similaire dans sa représentation électrique. De même, l'énergie potentielle emmagasinée par la déformation d'un élément mécanique est représentée par l'énergie emmagasinée dans un condensateur sous l'influence d'une différence de potentiel.

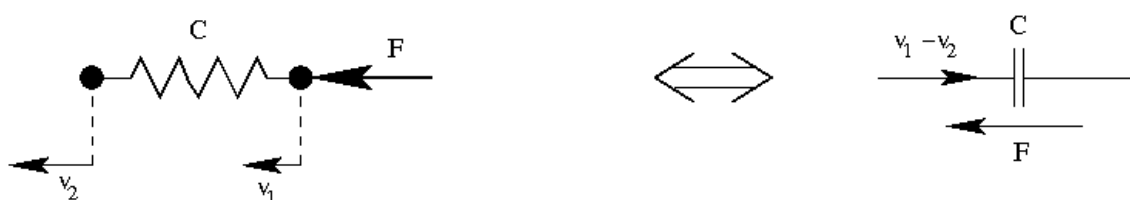
L'analogie "directe" conduit ainsi à associer une impédance électrique à une impédance mécanique : elle est donc parfois appelée "analogie impédance".

2. Analogie directe des éléments mécaniques

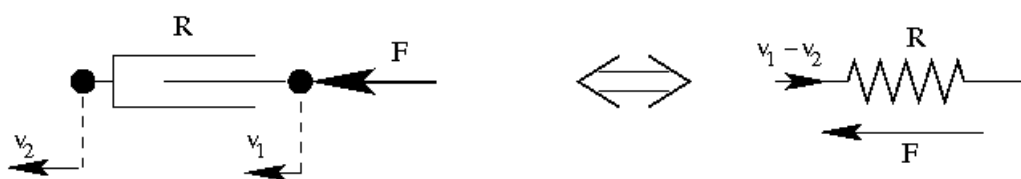
Inertie



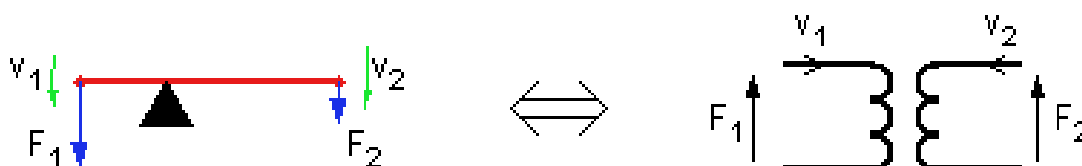
Souplesse



Amortissement



Levier



C. Analogie inverse

1. Analogie inverse

Conventionnellement, l'analogie "inverse" consiste à faire correspondre la tension électrique à la vitesse d'une masse mécanique.

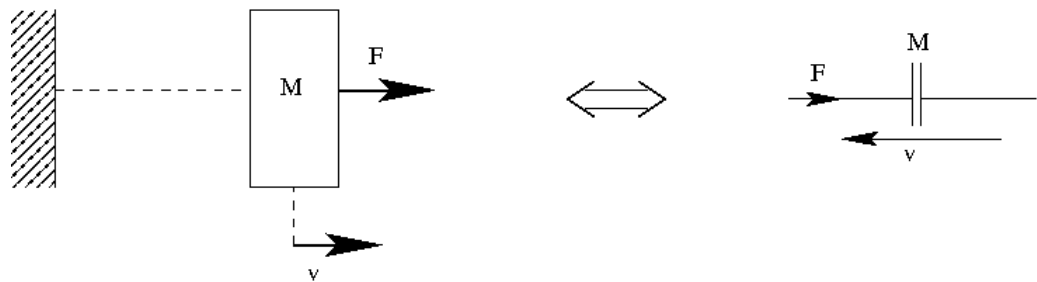
D'un point de vue énergétique, cela conduit à représenter l'énergie cinétique d'un système mécanique sous la forme de l'énergie potentielle emmagasinée dans un condensateur. De même, l'énergie potentielle emmagasinée par la déformation d'un élément mécanique est représentée par l'énergie cinétique liée à la circulation d'un courant dans une inductance.

L'analogie "inverse" conduit ainsi à associer une admittance électrique à une impédance mécanique : elle est donc parfois appelée "analogie admittance".

Les représentations de l'amortissement et d'un levier sont les mêmes dans les deux représentations, sauf que les rôles de la force et la vitesse sont inversés.

2. Analogie inverse des éléments mécaniques

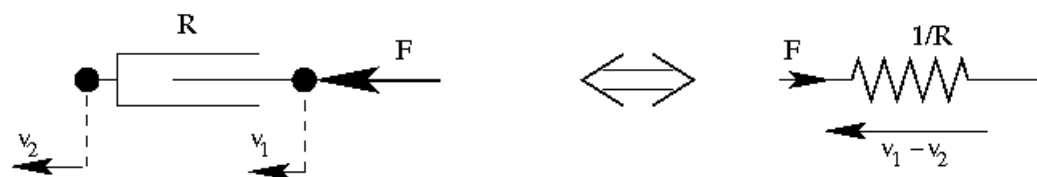
Inertie



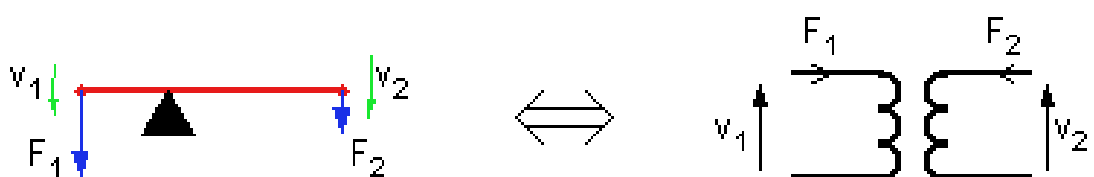
Souplesse



Amortissement



Levier



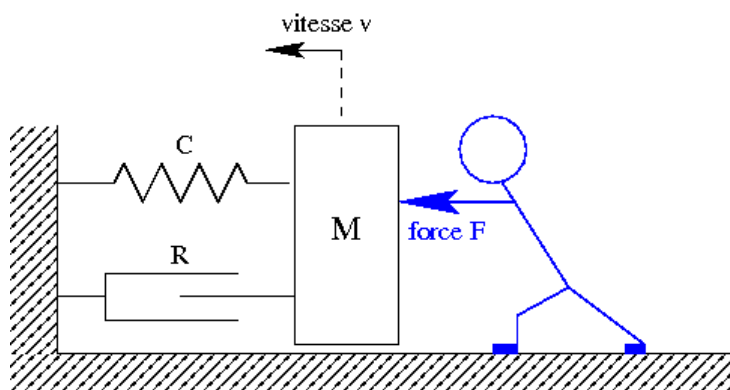
D. Système mécanique simple

1. Système mécanique simple

Nous allons maintenant illustrer les analogies mécano-électriques en établissant le schéma mécanique d'un système simple : le système "masse-ressort", puis en le représentant par son schéma électrique équivalent établi selon les deux analogies.

2. Système "masse-ressort" soumis à une force externe (1/2)

Considérons le système mécanique présenté schématiquement sur la figure ci-dessous, qui consiste en un système masse-ressort soumis à une force par un opérateur extérieur.



Ce système est donc décrit par un seul DDL, la vitesse $(v - v_{ref})$, et est soumis à la résultante des forces F , à laquelle il oppose sa réaction.

3. Système "masse-ressort" soumis à une force externe (2/2)

Le bilan des forces mises en jeu permet d'établir l'équation du mouvement suivante

$$F(t) - \frac{1}{C}(\xi(t) - \xi_{ref}) - R(v(t) - v_{ref}) = M\partial_t(v(t) - v_{ref}),$$

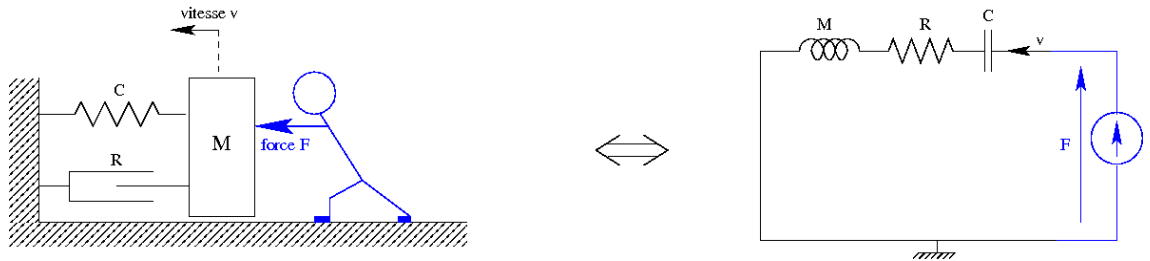
soit encore, en régime harmonique:

$$F - \frac{1}{jC\omega}(v - v_{ref}) - R(v - v_{ref}) = j\omega M(v - v_{ref}).$$

Considérant que l'action est la force exercée (cause du mouvement), et que l'effet de cette action est le mouvement de la masse (résultat), il est naturel en mécanique de considérer que **c'est la vitesse v qui "décrit" un DDL.**

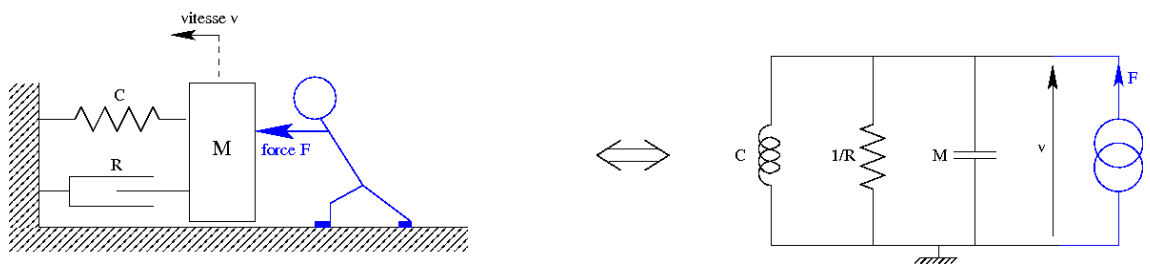
E. Comparaison des analogies

1. Système masse-ressort en analogie directe



- L'action d'une force mécanique correspond à l'action d'un générateur de tension électrique.
- La vitesse résultante, commune aux trois éléments mécaniques, correspond au courant électrique qui traverse les trois éléments électriques.
- La structure graphique du schéma électrique n'est pas la même que celle du schéma mécanique.

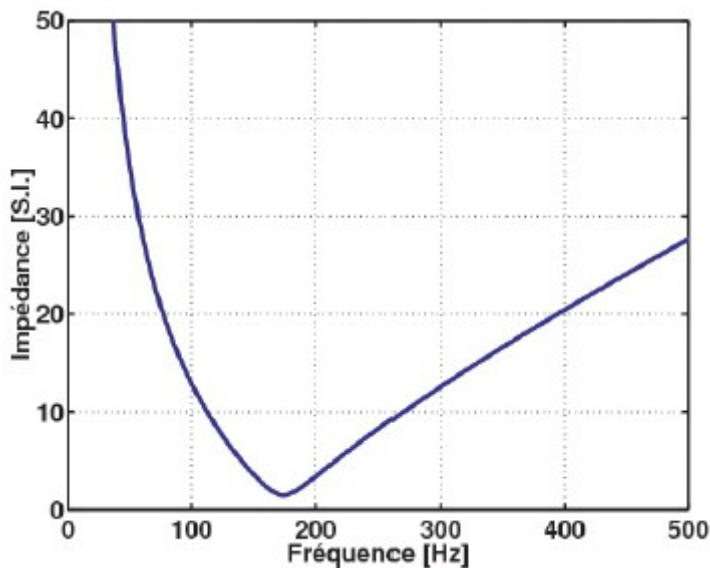
2. Système masse-ressort en analogie inverse



- L'action d'une force mécanique correspond à l'action d'un générateur de courant électrique.
- La vitesse résultante, commune aux trois éléments mécaniques, correspond à la tension aux bornes des trois éléments électriques.
- La structure graphique du schéma électrique similaire à celle du schéma mécanique.

3. Impédance mécanique

$$Z = \frac{F}{v} = \left[\frac{1}{j\omega C} + R + j\omega M \right] = \frac{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + j \frac{\omega}{Q\omega_0} \right]}{j\omega C} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{MC}} \text{ et } Q = \frac{M\omega_0}{R}$$



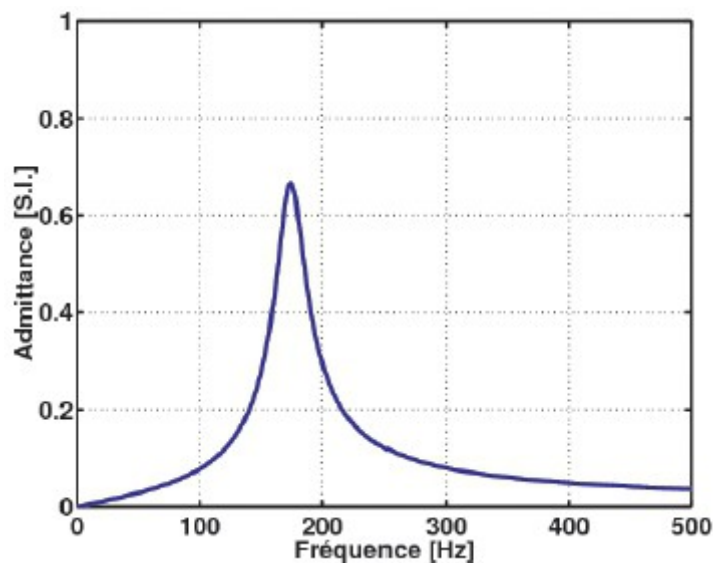
Alors que le système mécano a une réaction maximale à la résonance (voisine de sa fréquence propre $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{MC}}$), celle-ci correspond à un minimum de l'impédance Z : cette grandeur ne représente donc pas la réponse du système de manière très intuitive.

4. Mobilité (admittance mécanique)

$$Y = \frac{v}{F} = \frac{j\omega C}{[1 - \omega^2(MC) + j\omega(RC)]} = \frac{j\omega C}{[1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}]}$$

avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{MC}}$ et

$$Q = \frac{M\omega_0}{R}$$



La mobilité (ou admittance mécanique) Y est maximale à la résonance, ce qui correspond à une manière plus intuitive de représenter la réponse du système.

5. Choix d'une analogie

Les représentations usuelles sont liées aux moyens de mesure les plus accessibles : il est facile d'estimer un déplacement mécanique ou une tension électrique, et cela ne nécessite pas de modification des systèmes.

De ce fait, les présentations usuelles associent un degré de liberté à une grandeur spécifique à chaque forme d'énergie :

- La vitesse d'une masse pour un système mécanique,
- La tension d'un conducteur pour un système électrique.

La description mécanique la plus naturelle correspond donc à un schéma électrique en analogie inverse. Pourtant, il est plutôt d'usage de représenter les schémas électromécaniques équivalents en analogie directe, notamment pour éviter de mélanger les deux analogies lorsque l'on couple un système mécanique à une charge acoustique (elle même "naturellement" représentée en analogie directe).

Schéma équivalent d'un système

IV

Applications, exemple d'un système à 2 DDL.	21
Cas d'un système réel : le haut-parleur	21
Système mécanique	22
Approche directe : description mécanique	23
Approche directe : regroupement des termes	23
Approche directe: analogie électro-mécanique (1/2)	23
Approche directe: analogie électro-mécanique (2/2)	24
Méthode des mobilités: principe	24
Méthode des mobilités: schéma mécanique	25
Méthode des mobilités: conversion en analogie inverse	25
Méthode des mobilités : conversion en schéma dual	26

A. Applications, exemple d'un système à 2 DDL.

Nous allons maintenant voir une méthode simple et systématique pour transformer le schéma d'un système mécanique en un schéma électrique équivalent en analogie directe.

Cette méthode va être illustrée pour un cas d'étude réaliste, dans lequel il y a plusieurs degrés de liberté. Cette complexité accrue permet de réaliser l'intérêt de l'emploi d'une méthode systématique.

B. Cas d'un système réel : le haut-parleur

Cette vidéo est issue d'une mesure effectuée avec un vibromètre laser. Elle représente la vibration (amplifiée pour être visible) d'un haut-parleur à une fréquence particulière correspondant à deux mouvements indépendants :

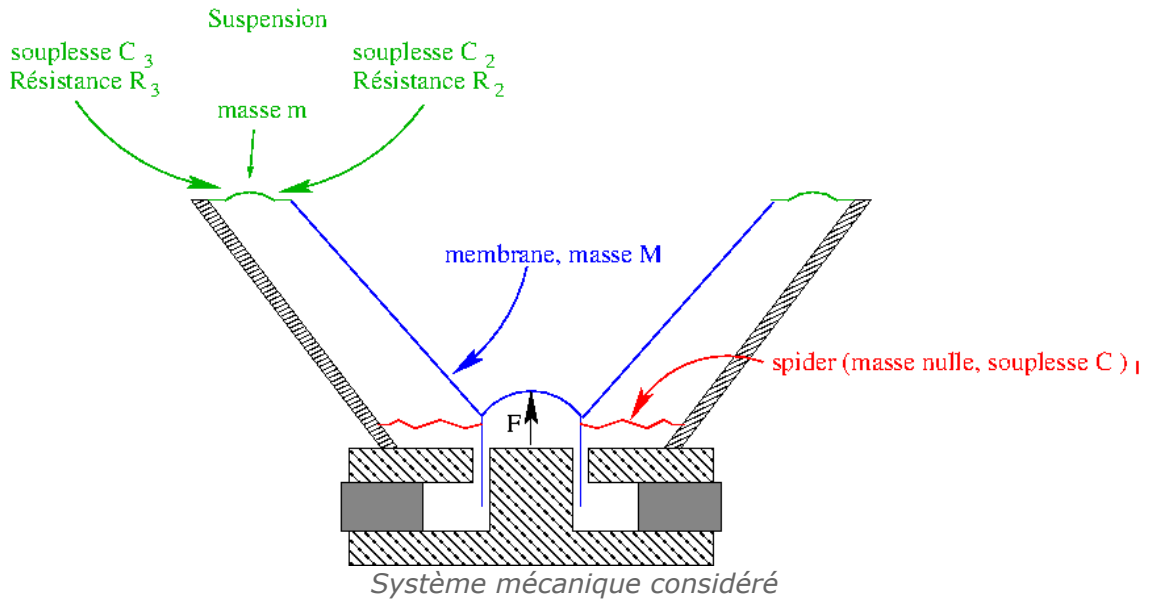
d'une part le diaphragme, et d'autre part la suspension.

Le diaphragme est léger et très rigide : il se comporte comme un corps indéformable.

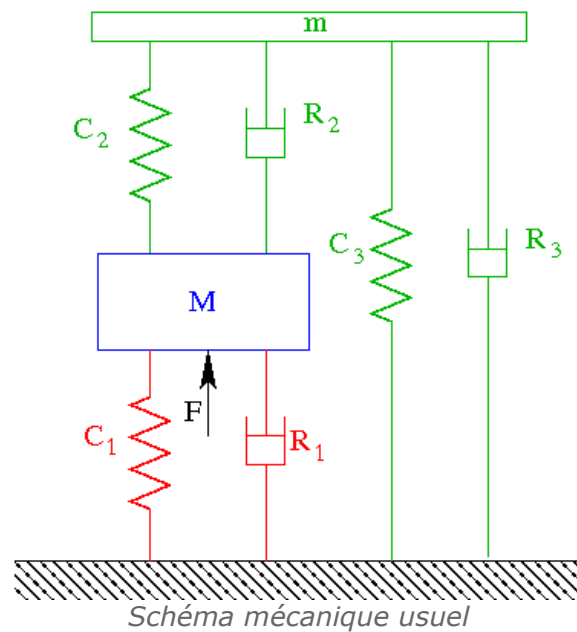
La suspension est très souple, et plutôt lourde : elle fléchit, et son inertie lui impose une déformation spécifique.

La partie mobile doit être décrite par deux masses indépendantes

C. Système mécanique



Les caractéristiques de la suspension externe (en vert sur les schémas) ne permettent pas de la considérer comme une simple compliance. Elle est associée à un degré de liberté (masse m) indépendant de celui associé au mouvement de la membrane (masse M), et sa compliance se répartit alors entre C_2 et C_3 .



D. Approche directe : description mécanique

★ Une façon classique de décrire ce système consiste à faire usage du principe fondamental de la dynamique, après avoir identifié les différentes forces appliquées sur chacune des masses. Ceci mène au système d'équations suivantes:

$$\begin{aligned} F - C_1\xi_1 - R_1\frac{d\xi_1}{dt} - C_2(\xi_1 - \xi_3) - R_2\left(\frac{d\xi_1}{dt} - \frac{d\xi_3}{dt}\right) &= M\frac{d\xi_1}{dt} \\ -C_3\xi_3 - R_3\frac{d\xi_3}{dt} - C_2(\xi_3 - \xi_1) - R_2\left(\frac{d\xi_3}{dt} - \frac{d\xi_1}{dt}\right) &= m\frac{d\xi_3}{dt} \end{aligned}$$

où ξ_1 et ξ_3 désignent respectivement les déplacements des masses M et m .

★ Ce jeu d'équations différentielles couplées peut être résolu numériquement, mais aussi analytiquement.

E. Approche directe : regroupement des termes

★ Les équations précédentes peuvent être réorganisées en regroupant les termes qui dépendent des mêmes déplacements de masses, cad liés aux mêmes degrés de libertés :

$$\begin{aligned} -F + M\frac{d\xi_1}{dt} + C_1\xi_1 + R_1\frac{d\xi_1}{dt} &= C_2(\xi_3 - \xi_1) + R_2\left(\frac{d\xi_3}{dt} - \frac{d\xi_1}{dt}\right) \\ m\frac{d\xi_3}{dt} + C_3\xi_3 + R_3\frac{d\xi_3}{dt} &= C_2(\xi_1 - \xi_3) + R_2\left(\frac{d\xi_1}{dt} - \frac{d\xi_3}{dt}\right) \end{aligned}$$

★ Cette ré-écriture met en évidence l'existence de trois groupes de termes : deux sont liés spécifiquement à un des degrés de liberté (termes en ξ_1 ou ξ_3).

★ Le troisième groupe est commun (au signe près) aux deux équation, et décrit leur couplage (terme en $\xi_3 - \xi_1$).

★ La représentation du système comportera donc deux groupes dépendant de chacun des degrés de liberté, reliés par un groupe décrivant leur couplage. Selon le type d'analogie utilisé, le schéma équivalent décrit ces groupes par des mailles (analogie directe) ou des branches (analogie inverse).

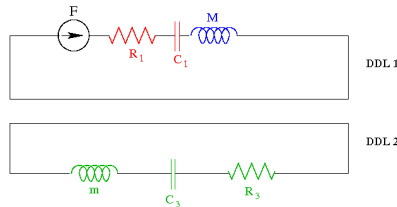
F. Approche directe: analogie électro-mécanique (1/2)

★ Dans une analogie directe, le schéma électrique équivalent peut être obtenu à partir des règles suivantes, découlant du principe de cette analogie :

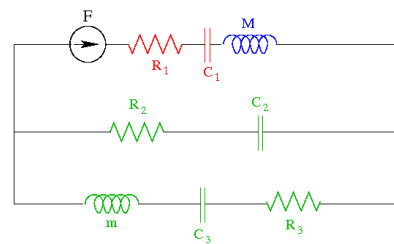
- A chaque DDL correspond une maille qui exprime le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse qui a le mouvement correspondant à ce DDL.
- Cette maille constitue un circuit fermé comportant en série tous les éléments associés au mouvement de la masse, y compris les forces externes qui s'appliquent dessus.
- Le couplage entre deux DDL est décrit par une branche commune aux deux mailles concernées, qui partagent ainsi cette branche de couplage. Ceci constitue donc un assemblage de trois branches en parallèle.

G. Approche directe: analogie électro-mécanique (2/2)

Ce principe de construction du schéma électrique est illustré ci-dessous :



Deux masses non couplées



Deux masses avec couplage.

★ On peut remarquer que la topologie du circuit électrique équivalent n'est pas identique à celle du schéma mécanique. Ceci a pour conséquence qu'il n'est pas toujours intuitif de l'établir d'après le schéma d'un système mécanique. Le risque d'erreur croît avec la complexité du système mécanique à décrire (augmentation du nombre de degrés de liberté).

★ Pour ceux à qui la méthode ci-dessus ne convient pas, une autre approche existe, en partant du schéma mécanique : c'est la "méthode des mobilités".

H. Méthode des mobilités: principe

★ La méthode des mobilités consiste à décrire dans un premier temps le système mécanique en analogie inverse, laquelle étant obtenue de façon "évidente", pour convertir ensuite le schéma électrique en analogie directe.

★ elle se décline en trois étapes:

- Description du système par son schéma mécanique **complet**.
- Obtention du circuit électrique équivalent en analogie inverse (topologie du schéma mécanique "respectée" par l'analogie inverse)
- Conversion en "circuit dual" pour obtenir le schéma électrique en analogie directe

Cette méthode est utilisable pour des systèmes complexes

I. Méthode des mobilités: schéma mécanique

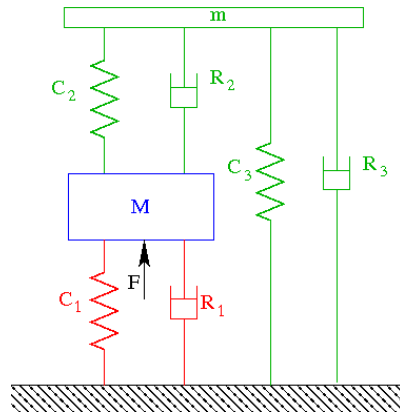
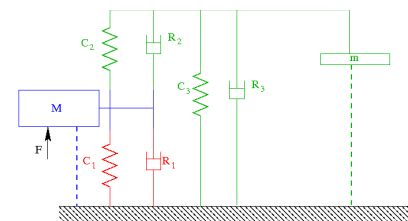


Schéma mécanique usuel

Nouveau schéma faisant apparaître les liaisons des masse au référentiel de vitesse nulle



Le schéma mécanique doit être complet

- Chaque force externe est implicitement "reliée" au référentiel
- Ceci est en particulier vrai pour les "forces d'inertie" ($M_i \frac{dv}{dt}$)

J. Méthode des mobilités: conversion en analogie inverse

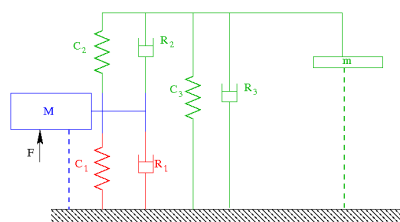
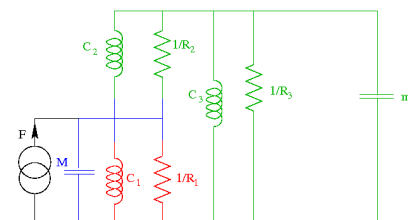


Schéma mécanique "complet"

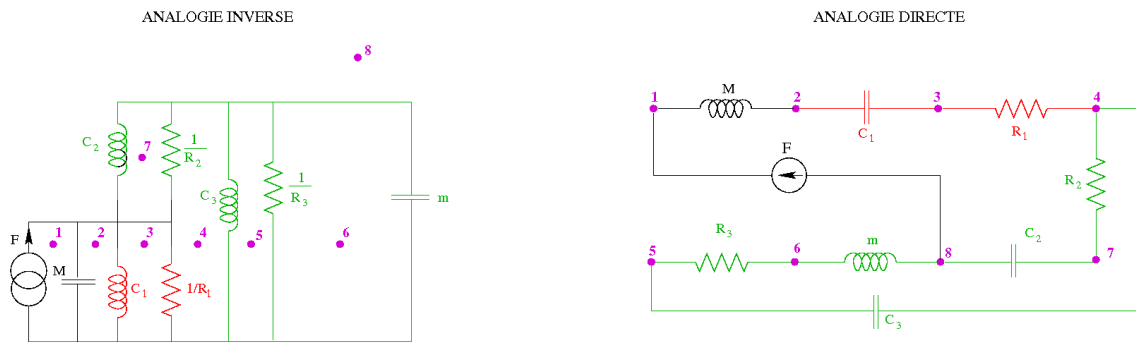
Schéma électrique équivalent en analogie inverse (admittance)



Masses du schéma mécanique (noeuds) \Leftrightarrow vitesses

- La structure du schéma est globalement conservée
- Les éléments sont donc convertis un par un

K. Méthode des mobilités : conversion en schéma dual



Tout circuit possède son "dual"

- Afin d'obtenir le circuit dual, on commence par placer un point dans chaque maille, y compris la maille extérieure (ici indiquée 8). Ces mailles deviennent alors des noeuds par passage au circuit dual.
- Les éléments partagés par 2 mailles indépendantes sont les éléments à connecter entre les 2 noeuds correspondant du circuit dual, et compte-tenu que le changement d'analogie implique également un changement de la nature de l'élément, i.e. un condensateur C devient une self C , une résistance $1/R$ devient une résistance R , etc ...

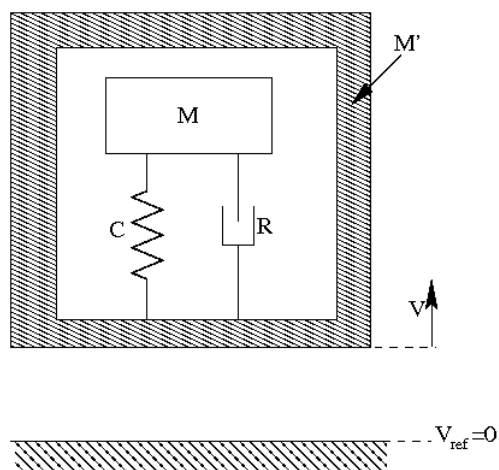
Conclusion

V

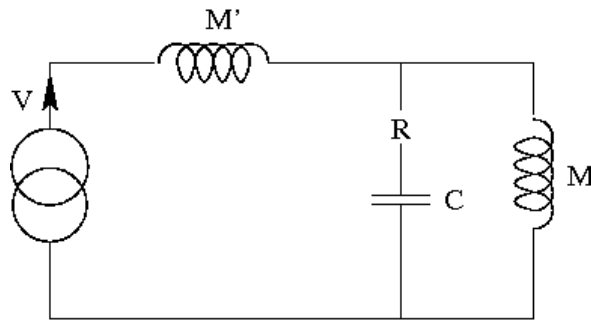
Test de sortie	27
Test de sortie: réponse	28
Bibliographie	28

A. Test de sortie

Déterminer le schéma électrique équivalent au système qui suit (partie mécanique d'un accéléromètre)



B. Test de sortie: réponse



C. Bibliographie

- [1] J. Merhaut, "Theory of electroacoustics", chapitre 1, Mc Graw-Hill, 1981.
- [2] M. Rossi, "Audio", chapitre 6, Presse Polytechniques et Universitaires Romandes, 2007